Ентропія Колмогорова-Синая та її застосування в теорії динамічних систем

С. І. Максименко

(Інститут математики НАН України)

XIV Всеукраїнська науково-практична конференція
«Теоретичні і прикладні проблеми
фізики, математики та інформатики»

26 травня 2016 р.

Динамічні системи

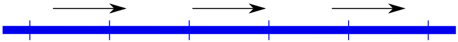
Нехай

- X - метричний простір
- $f : X \to X$ - неперервне відображення

Задача: «описати поведінку» точок при ітераціях f.
Тобто для кожної точки $x \in X$ розглянути послідовніть її образів

$$x, \quad f(x), \quad f^2(x) := f(f(x)), \quad f^3(x) := f(f(f(x))), \quad \cdots$$

і «виявити якісь закономірності в поведінці цих точок»

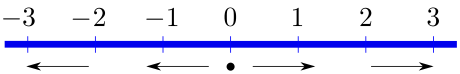


$$x \mapsto x + 1$$

$$x, \quad x+1, \quad x+2, \quad x+3, \quad \cdots$$

Зсув вправо на 1

$$7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto \cdots \longrightarrow +\infty$$



$$x \mapsto 2x$$

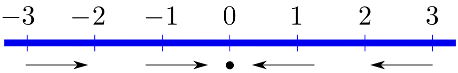
$$x, \quad 2x, \quad 4x, \quad 8x, \quad \cdots$$

Розтяг в 2 рази з центром в точці 0

$$3 \mapsto 6 \mapsto 12 \mapsto 24 \mapsto \cdots \longrightarrow +\infty$$

$$0 \mapsto 0 \mapsto 0 \mapsto 0 \mapsto \cdots \longrightarrow 0$$

$$-1 \mapsto -2 \mapsto -4 \mapsto -8 \mapsto \cdots \longrightarrow -\infty$$



$$x \mapsto x/2$$

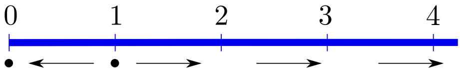
$$x, \quad x/2, \quad x/4, \quad x/8, \quad \cdots$$

Стиск в 2 рази з центром в точці 0

$$3 \mapsto 1.5 \mapsto 0.75 \mapsto 0.375 \mapsto \cdots \longrightarrow 0$$

$$0 \mapsto 0 \mapsto 0 \mapsto 0 \mapsto \cdots \longrightarrow 0$$

$$-1 \mapsto -0.5 \mapsto -0.25 \mapsto -0.125 \mapsto \cdots \longrightarrow 0$$



$$x \mapsto x^2, \quad x \in [0, +\infty)$$

$$x, \quad x^2, \quad x^4, \quad x^8, \quad \cdots$$

- Точки 0 та 1 є нерухомими

$$0 \mapsto 0 \mapsto 0 \mapsto 0 \mapsto \cdots \longrightarrow 0$$

$$1 \mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto \cdots \longrightarrow 1$$

- Точки з інтервалу $(0, 1)$ рухаються до 0:

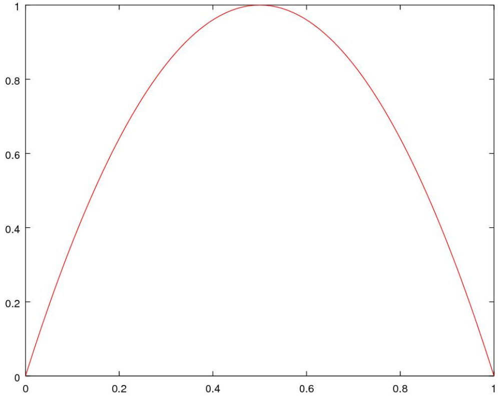
$$0.5 \mapsto 0.25 \mapsto 0.0625 \mapsto 0.00390625 \mapsto \cdots \longrightarrow 0$$

- Точки з інтервалу $(1, +\infty)$ рухаються до $+\infty$

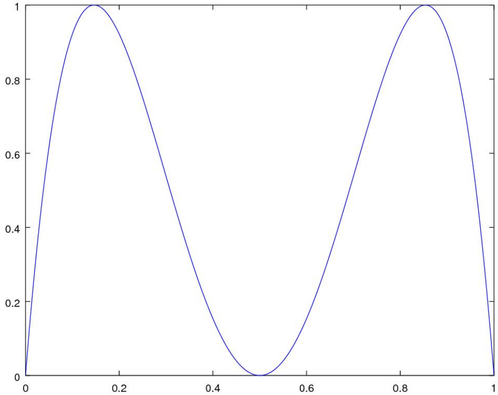
$$2 \mapsto 4 \mapsto 16 \mapsto 256 \mapsto \cdots \longrightarrow +\infty$$

Логістичне відображення:

$f : [0,1] \to [0,1], \qquad f(x) = 4x(1-x)$

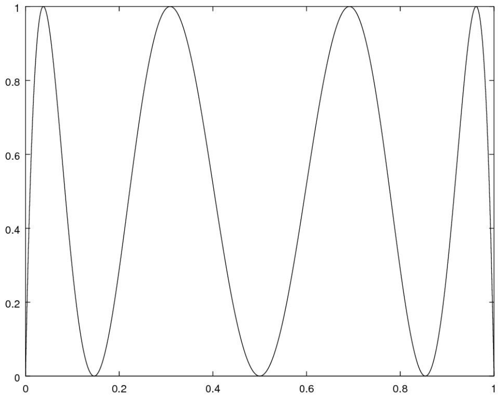


Друга ітерація логістичного відображення:
$f : [0,1] \to [0,1], \qquad f(x) = 4x(1-x)$



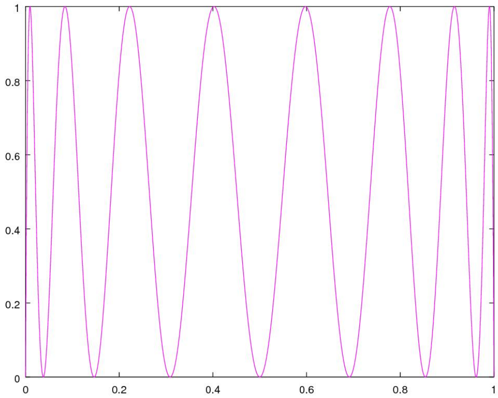
$$y = f(f(x)) = 4f(x)(1-f(x)) = 4 \cdot 4x(1-x) \cdot \big(1 - 4x(1-x)\big).$$

Третя ітерація логістичного відображення:
$f : [0, 1] \to [0, 1], \qquad f(x) = 4x(1-x)$



$$y = f(f(f(x))) = f^3(x).$$

Четверта ітерація логістичного відображення:
$f : [0,1] \to [0,1], \qquad f(x) = 4x(1-x)$



$$y = f(f(f(f(x)))) = f^4(x).$$

Вимірні динамічні системи

Нехай

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ - ймовірнісний простір, тобто
  - $\mathcal{F}$ - це σ-алгебра підмножин в X
  - $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ - ймовірнісна міра на $\mathcal{F}$, $\mu(X) = 1$.
- $f : X \to X$ - вимірне відображення, яке зберігає міру μ, тобто
$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$
  для всіх $A \in \mathcal{F}$

Четвірка $(X, \mathcal{F}, \mu, f)$ називається вимірною динамічною системою.

Задача: описати поведінку точок при ітераціях відображення f.

Еквівалентність вимірних динамічних систем

Дві вимірні динамічні системи

$$(X, \mathcal{F}, \mu, f) \qquad\qquad (Y, \mathcal{G}, \nu, g)$$

називаються еквівалентними, якщо існує вимірний ізоморфізм $h : X \to Y$ такий, що має місце комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Точне формулювання проблеми: дати класифікацію вимірних динамічних систем з точністю до еквівалентності.

1. Нехай μ - міра Лебега (довжина) на числовій прямій $\mathbb{R}$. Тоді відображення $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + a, \qquad x \mapsto -x + a$$

зберігають μ

2. Більш загально, нехай μ - міра Лебега (площа, об'єм) в $\mathbb{R}^n$. Тоді кожне лінійне відображення $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ визначник якого $|A| = \pm 1$ зберігає міру μ.
Наприклад, при $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Теорема Крилова-Боголюбова

Теорема. *Нехай X — компактний метричний простір. Тоді для довільного неперервного відображення $f : X \to X$ існує інваріантна міра на борелівській алгебрі $\mathcal{B}(X)$*

Таким чином динамічні системи на компактних метризовних просторах можна вивчати з точки зору теорії вимірних динамічних систем.

Микола Митрофанович Крилов
(1879 - 1955)

Микола Миколайович Боголюбов
(1909 - 1992)

Інваріантні міри для деяких динамічних систем

Точні формули для інваріантних мір знайдені лише в невеликій кількості випадків.
Зокрема, для логістичного відображеня $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = 4x(1-x)$ міра μ задається формулою:

$$\mu[a,b] = \int_a^b \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

Інваріантні міри для деяких динамічних систем

Для відображення $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = 2x$ міру μ можна задати формулою:

$$\mu[a, b] = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(a) = \ln \frac{b}{a}.$$

Інваріантність означає, що

$$\mu[2a, 2b] = \ln \frac{2b}{2a} = \ln \frac{b}{a} = \mu[a, b].$$

Ентропія скінченного вимірного розбиття

Нехай

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ - ймовірнісний простір.
- $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ - скінчене вимірне розбиття, тобто

$$A_i \in \mathcal{F}, (i = 1, \ldots, k), \qquad A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j, \qquad X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Ентропія $H_\mu(\mathcal{A})$ цього розбиття відносно міри μ визначається за формулою:

$$\boxed{H_\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \log_2 \mu(A_i)}$$

Якщо $\mu(A) = 0$ для деякого $A \in \mathcal{A}$, то вважатимемо

$$\mu(A) \log \mu(A) = 0.$$

Властивості ентропії

1. Припустимо, що $\mu(A_1) = \cdots = \mu(A_k) = \frac{1}{k}$. Тоді

$$H_\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \log_2 \mu(A_i) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \log \frac{1}{k} = \log_2 k.$$

Зокрема, це число росте з ростом k.

2. Припустимо, що $\mu(A_1) = 1$ і $\mu(A_2) = \cdots = \mu(A_k) = 0$. Тоді

$$H_\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \log_2 \mu(A_i) = -1 \cdot \log_2 1 - \sum_{i=2}^{k} \underbrace{0 \cdot \log_2 0}_{=0} = 0$$

Інтуїтивний зміст ентропії

Виберемо навмання точку $x \in X$ і поставимо таке питання: *знаючи міри всіх множин розбиття, чи можна сказати до якої з множин A_i ця точка належить?*
Ентропію розбиття $\mathcal{A}$ можна розглядати як міру «невизначеності» того, до якої з множин належить точка.
Якщо міри всіх множин A_i майже однакові, то така «невизначеність» є максимальною і це узгоджується з тим, що в даній ситуації ентропія найбільша. Крім того, при подрібненні деяких елементів розбиття ентропія також збільшується.
Навпаки, якщо майже вся міра сконцентрована в одній з множин A_i, то «скоріше за все» дана точка належить до A_i, і в цьому випадку ентропія виявляється найменшою.

Дві конструкції

1) Якщо $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ - дві скінченних вимірних розбиття X то можна визначити нове розбиття X:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, \;\; B \in \mathcal{B}\}$$

яке складається з усіх можливих попарних перетинів елементів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$

2) Нехай $f : X \to X$ - відображення, яке зберігає міру μ, і $\mathcal{A}$ - скінченне вимірне розбиття X. Тоді прообразом $\mathcal{A}$ віносно f називається розбиття

$$f^{-1}\mathcal{A} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\},$$

яке складається з прообразів елементів $\mathcal{A}$.

Ентропія Колмогорова-Синая

Нехай $f : X \to X$ - відображення, яке зберігає міру μ і $\mathcal{A}$ - скінченне вимірне розбиття X.

Швидкістю росту ентропії $\mathcal{A}$ відносно f називається

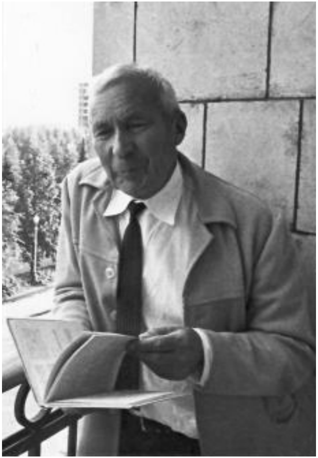
$$\boxed{h(f, \mathcal{A}) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathcal{A} \right)}$$

Ентропія Колмогорова-Синая відображення f визначається за формулою:

$$\boxed{h^{KS}(f) := \sup_{\mathcal{A}} h(f, \mathcal{A}) = \sup_{\mathcal{A}} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathcal{A} \right)}$$

де $\mathcal{A}$ пробігає всі скінчені вимірні розбиття X.

Важливість ентропія Колмогорова-Синая полягає в тому, що вона інваріантна відносно вимірних еквівалентностей. А тому дозволяє доводити, що відображення мають різну «динамічну» поведінку.



Андрій Миколайович Колмогоров
(1903 - 1987)

Яків Григорович Синай
(1935)

Приклад

Let

- $\Omega = D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ - замкнутий круг,
- $\mathcal{F} = \mathcal{B}(D^2)$ - борелівська алгебра множин D^2,
- μ - міра Лебега (площа),
- $f : D^2 \to D^2$,
$$f(z) = e^{2\pi i\alpha} z$$
обертання на кут $2\pi\alpha$. Тоді f зберігає міру μ.

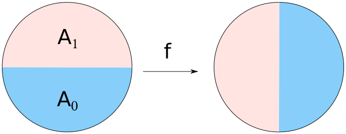
Нехай

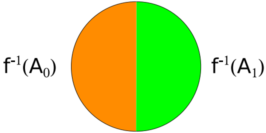
$$A_0 = \{z = x+iy \in D^2 \mid y < 0\}, \qquad A_1 = \{z = x+iy \in D^2 \mid y \geq 0\},$$

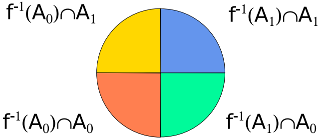
$$\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$$

скінченне розбиття D^2.
Якщо α - раціональне число, то $h(f, \mathcal{A}) = 0$.

Приклад: $\alpha = \pi/2$







Розбиття $\bigvee\limits_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathcal{A}$ стабілізуються, а тому

$$h(f,\mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathcal{A}\right) = 0.$$

Зсув Бернуллі

Нехай $X = \{(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mid a_j \in \{0,1\}\}$ — множина всіх нескінченних в обидві сторони послідовностей, що складаються лише з чисел 0 та 1.

$$(\ldots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots)$$

Зсув Бернуллі

Нехай $X = \{(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mid a_j \in \{0,1\}\}$ — множина всіх нескінченних в обидві сторони послідовностей, що складаються лише з чисел 0 та 1.

$$(\ldots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots)$$

Циліндрична множина - всі послідовності зі скінченним числом фіксованих координат. Циліндричні множини породжують σ-алгебру $\mathcal{F}$.

Зсув Бернуллі

Нехай $X = \{(a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid a_j \in \{0, 1\}\}$ — множина всіх нескінченних в обидві сторони послідовностей, що складаються лише з чисел 0 та 1.

$$(\ldots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots)$$

Циліндрична множина - всі послідовності зі скінченним числом фіксованих координат. Циліндричні множини породжують σ-алгебру $\mathcal{F}$.

Визначимо ймовірнісну міру μ на $\mathcal{F}$:

$$\mu(X) = \mu\{(\ldots,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ \ldots)\} = 1$$

$$\mu\{(\ldots,\ *,\ *,\ 1,\ *,\ *,\ *,\ \ldots)\} = \frac{1}{2}$$

$$\mu\{(\ldots,\ *,\ *,\ 1,\ *,\ 0,\ *,\ \ldots)\} = \frac{1}{4}$$

$$\mu\{(\ldots,\ *,\ 0,\ 1,\ *,\ 0,\ *,\ \ldots)\} = \frac{1}{8}$$

Зсув Бернуллі $f : X \to X$

Це відображення зсуву координат на 1 вправо:

$$(\ldots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots)$$

$$\Downarrow$$

$$(\ldots, *,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$$

$$\Downarrow$$

$$(\ldots, *,\ *,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ \ldots)$$

Воно зберігає міру μ.

Зсув Бернуллі $f : X \to X$

Це відображення зсуву координат на 1 вправо:

$$(\ldots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots)$$

$$\Downarrow$$

$$(\ldots, *,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$$

$$\Downarrow$$

$$(\ldots, *,\ *,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ \ldots)$$

Воно зберігає міру μ.
Питання: чи будуть вимірно еквівалентними f^2 та f^3?

Зсув Бернуллі $f : X \to X$

Це відображення зсуву координат на 1 вправо:

$$(\dots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \dots)$$

$$\Downarrow$$

$$(\dots, *,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dots)$$

$$\Downarrow$$

$$(\dots, *,\ *,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ \dots)$$

Воно зберігає міру μ.
Питання: чи будуть вимірно еквівалентними f^2 та f^3?

Теорема. *$h^{KS}(f) = \log 2$ і більш загально, $h^{KS}(f^n) = n \log 2$.*

Зсув Бернуллі $f : X \to X$

Це відображення зсуву координат на 1 вправо:

$$(\dots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \dots)$$

$$\Downarrow$$

$$(\dots, *,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dots)$$

$$\Downarrow$$

$$(\dots, *,\ *,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ \dots)$$

Воно зберігає міру μ.
Питання: чи будуть вимірно еквівалентними f^2 та f^3?

Теорема. $h^{KS}(f) = \log 2$ *і більш загально,* $h^{KS}(f^n) = n \log 2$.

Наслідок. $h^{KS}(f^2) = \log 2 \neq h^{KS}(f^3) = \log 3$, *а тому* f^2 *та* f^3 *не є вимірно еквівалентними.*

Дякую за увагу!